1 級 1 次過去問題・必答 (各 0.5 点　計 1 点)

関数 $f(x)=x^2e^{-x}$ について，次の問いに答えなさい。ただし，e は自然対数の底を表します。

(1) $f(x)$ の第 5 次導関数の $x=-1$ における値 $f^{(5)}(-1)$ を求めなさい。

(2) $f(x)$ の第 10 次導関数の $x=-1$ における値 $f^{(10)}(-1)$ を求めなさい。

(解答)

$(x^2)^{(3)}=0$ 及び Leibniz(ライプニッツ) の公式から，$n\geq 3$ なる任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&f^{(n)}(x)\\
&=(x^2e^{-x})^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(x^2)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(x^2)^{(k)}(-1)^{n-k}e^{-x}\\
&=(-1)^ne^{-x}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(x^2)^{(k)}(-1)^{-k}=(-1)^ne^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k(x^2)^{(k)}\\
&=(-1)^ne^{-x}\left\{(-1)^0{}_n\mathrm{C}_0(x^2)^{(0)}+(-1)^1{}_n\mathrm{C}_1(x^2)^{(1)}+(-1)^2{}_n\mathrm{C}_2(x^2)^{(2)}+\sum_{k=3}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k(x^2)^{(k)}\right\}\\
&=(-1)^ne^{-x}\left\{x^2-2nx+n(n-1)+\sum_{k=3}^{n}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k\cdot 0\cdot(-1)^{n-k}\right\}\\
&=(-1)^n\{x^2-2nx+n(n-1)\}e^{-x}\ (\cdots\circledast)
\end{aligned}
$$

となる。

(1)
$\circledast$ より，$f^{(5)}(-1)=(-1)^5\{(-1)^2-2\cdot 5\cdot(-1)+5\cdot(5-1)\}e^{-(-1)}=\underline{-31e}$ となる.

(2)
$\circledast$ より，$f^{(10)}(-1)=(-1)^{10}\{(-1)^2-2\cdot 10\cdot(-1)+10\cdot(10-1)\}e^{-(-1)}=\underline{111e}$ となる.

(補足)
実は $f^{(n)}(x)=(-1)^n\{x^2-2nx+n(n-1)\}e^{-x}$ は，$n=0,1,2$ のときも成立することが，
各場合を計算することにより確かめられる．つまりは，任意の非負整数 n に対して $\circledast$ が成立する．

1 級 2 次過去問題・必答 (計 1 点)

$\mathbb{R}^2$ を実 2 次元線形空間とし，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f を

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ -6x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$$

によって定めます。これについて，次の問いに答えなさい。

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ (f の核) を求めなさい。

(2) $\mathbb{R}^2$ の基底 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ に関する f の表現行列を求めなさい。

(解答)

(1)

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f \;\Leftrightarrow\; f(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - 4y = -6x + 8y = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - 4y = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

より，$\mathrm{Ker}\, f = \underset{\sim\sim\sim}{\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}$ となる.

(2)

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathbb{R}^2$ の基底 v_1, v_2 に対して，

$$\begin{aligned} (f(v_1)\ f(v_2)) &= (\begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \\ -6 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 3 \cdot (-5) - 4 \cdot 3 \\ -6 \cdot (-5) + 8 \cdot 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 10 & -27 \\ -20 & 54 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 & -27 \\ -20 & 54 \end{pmatrix} = (v_1\ v_2) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -27 \\ -20 & 54 \end{pmatrix} \\ &= (v_1\ v_2) \begin{pmatrix} -70 & 189 \\ -30 & 81 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より，f の基底 v_1, v_2 に関する表現行列は $\underset{\sim\sim\sim}{\begin{pmatrix} -70 & 189 \\ -30 & 81 \end{pmatrix}}$ となる.