関数

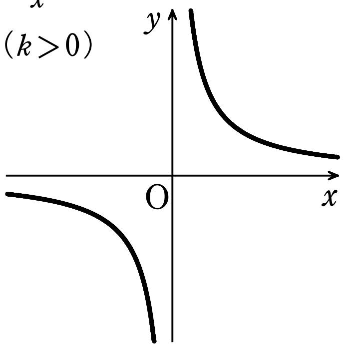
攻略 ITEM

＜分数関数＞

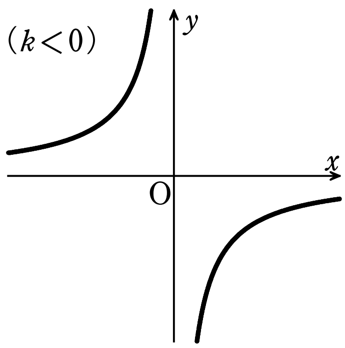
<u>グラフ</u>

$y=\dfrac{k}{x}$ （$xy=k$）（$k \fallingdotseq 0$）のグラフ

（$k>0$）



（$k<0$）



注　この曲線は直交する2直線 $x=0$（y 軸），$y=0$（x 軸）を漸近線とする直角双曲線であり，x, y が反比例することを表すグラフである。

注　双曲線 $x^2-y^2=2k$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものである。

$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 　（$(x-p)(y-q)=k \fallingdotseq 0$）のグラフ

→ $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 方向に p, y 方向に q だけ平行移動したものである

注　この曲線の漸近線は $x=p$, $y=q$

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 　（$a \fallingdotseq 0$, $ad-bc \fallingdotseq 0$）のグラフ

→ 分子を分母で割って $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形にして考える

<u>方程式・不等式</u>

$\boxed{1}$ グラフの利用

$\boxed{2}$

$\dfrac{A}{B}=C \iff A=BC$ かつ $B \fallingdotseq 0$

$\dfrac{A}{B}>0 \iff AB>0$ ，　$\dfrac{A}{B} \geqq 0 \iff AB \geqq 0$ かつ $B \fallingdotseq 0$

$\dfrac{A}{B}<0 \iff AB<0$ ，　$\dfrac{A}{B} \leqq 0 \iff AB \leqq 0$ かつ $B \fallingdotseq 0$

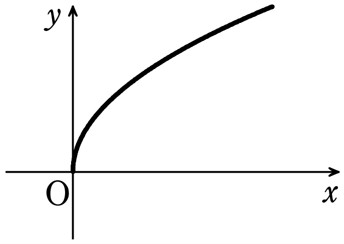
例　$\dfrac{x-4}{(x+3)(x-2)}>0 \iff (x-4)(x+3)(x-2)>0 \iff -3<x<2,\ 4<x$

＜無理関数＞

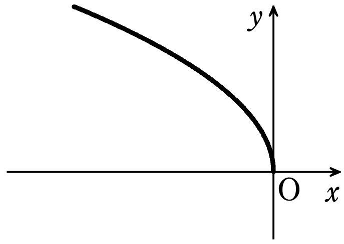
<u>グラフ</u>

$y=\sqrt{ax}$　のグラフ

（$a>0$）

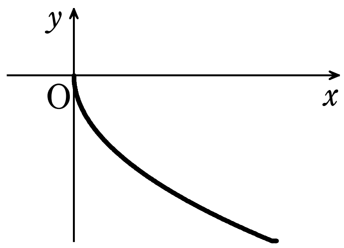


（$a<0$）

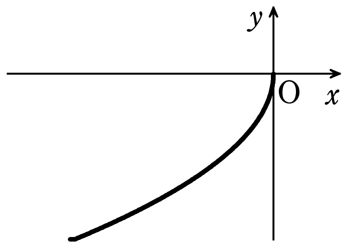


$y=-\sqrt{ax}$　のグラフ

（$a>0$）



（$a<0$）



注　$\sqrt{\ }$の中身$\geqq 0$　→　定義域　，　$\sqrt{\ }\geqq 0$　→　値域

注　$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$ だから $y=\sqrt{ax}$　のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$，
y 軸方向に c だけ平行移動したもの

注　$y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ のグラフ
→ $x^2+y^2=a^2$の $y\geqq 0$ の部分

<u>方程式・不等式</u>

$\boxed{1}$　グラフの利用

$\boxed{2}$

$$\sqrt{A}=B \iff A=B^2 \text{ かつ } B\geqq 0$$
$$\sqrt{A}<B \iff A<B^2 \text{ かつ } A\geqq 0 \text{ かつ } B>0$$
$$\sqrt{A}>B \iff \begin{cases} B\geqq 0 \text{ のとき} A>B^2 \\ B<0 \text{ のとき} A\geqq 0 \end{cases}$$
$$\sqrt{A}>\sqrt{B} \iff A>B \text{ かつ } B\geqq 0$$

例　$\sqrt{3-x}=x+3 \iff 3-x=(x+3)^2$ かつ$x+3\geqq 0 \iff x^2+7x+6=0$ かつ $x\geqq -3$
$\iff (x+6)(x+1)=0$ かつ $x\geqq -3 \iff x=-1$

研究＜写像＞

2つの集合 X と Y があり，集合 X のどの要素 x にも，それぞれ集合 Y の要素 y が1つだけ対応しているとき，この集合を，集合 X から集合 Y への**写像**といって

$$f:X \longrightarrow Y \text{ とか } X \xrightarrow{f} Y$$

と書く。x に応じて定まる y を，f による x の像といい，$f(x)$ で表す。

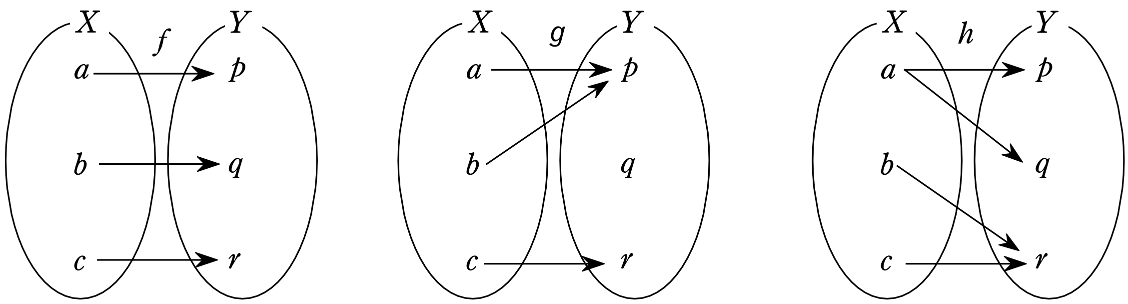
参考　写像 $f:X \longrightarrow Y$ において，f の値域が Y と一致する（Y の集合の要素が全部 X の要素と対応して余っているものがない）とき，f を X から Y への**上への写像**という。
また，$f:X \longrightarrow Y$ で X の異なる要素には Y の異なる要素が対応する，すなわち X の要素 a , b について

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$

となるとき，f を**1対1の写像**という。

$\boxed{1}$　$X=\{a, b, c\}$，$Y=\{p, q, r\}$ とする。

(i)　　　(ii)　　　(iii)



上の(i), (ii)　は写像であるが，(iii)　は a に対して $h(a)$ がただ1通りに定まらないから写像ではない。

(i)　$f:X \longrightarrow Y$ は上への写像かつ1対1の写像

(ii)　$g(X)=\{p, r \subset Y\}$（これを中への写像という）

$\boxed{2}$　f が X から Y への写像となる条件は，Y の任意の要素 y に対して，$y=f(x)$ となる $x(\in X)$が少なくとも1つ存在することである。

$\boxed{3}$　f が X から Y への1対1の写像となる条件は対偶を考えると
「$f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$」

研究＜逆写像＞

写像 $f:X \longrightarrow Y$ が上への1対1の写像のとき，Y の各要素 y に $y=f(x)$ となる X の要素 x を対応させると

Yから X への写像 $g:\underset{Y}{\underline{f(X)}} \longrightarrow X$ が得られるこの g を f の**逆写像**といい f^{-1} で表す。

＜逆関数＞

分数関数 $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0\,,\ ad-bc\neq 0)$ について

1. $f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$ である。
2. $f(x)$ と $f^{-1}(x)$ が一致するための必要十分条件は $\boldsymbol{a+d=0}$ である。

<u>求め方</u>

(i) $y=\cdots$ の形の式を $x=\cdots$ の形に解く。

(ii) 独立変数を x で表わす習慣に従って，変数 $x\,,y$ を入れ換える。

注 先に x と y を入れ替えて， y について解いてよい。

<u>記号，定義域・値域</u>

(i) 関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ で表わす。

(ii) ある関数とその逆関数とでは，定義域と値域が入れ替わる。

<u>逆関数が存在するための条件</u>

関数 $y=f(x)$ の逆関数が存在するためには，関数 $y=f(x)$ は1 対1 の関数でなければならない。

高校で扱う関数で言えば,「単調増加関数」または「単調減少関数」がこれに対応する。

<u>逆関数の性質</u>

$\boxed{1}$ f の定義域は f^{-1} の値域， f の値域は f^{-1} の定義域

$\boxed{2}$ $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $f^{-1}(x)$ とは $y=x$ の直線に関して対称である。

$\boxed{3}$ $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ ， $f^{-1}\circ f(x)=x$ ， $f\circ f^{-1}(x)=x$

＜合成関数＞

2 つの関数

$$f\colon X\to Y\ ,\ g\colon Y\to Z$$

が与えられているとき X のどの要素 x に対しても，Y の要素 $y=f(x)$ が対応し，y には Z の要素 $Z=g(y)$ が対応する。

このとき x を z に対応させれば X から Z への関数が得られる。この関数を f と g の合成関数といい，$g\circ f$ で表す。すなわち

$$g\circ f\colon X\to Z\ ,\ g\circ f(x)=g(f(x))$$

注 (i) $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ （結合法則は成立）

(ii) $g\circ f\neq f\circ g$ （一般に交換法則は不成立）

１．

関数 $y=\dfrac{ax+b}{2x+1}$ ……①のグラフは点 $(1,\ 0)$ を通り，直線 $y=1$ を漸近線にもつ。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) ①のグラフを利用して，不等式 $\dfrac{ax+b}{2x+1}>x-2$ を解け。

２．

曲線 $y=\sqrt{x+2}$ と直線 $y=x+a$ が共有点をもつとき，定数 a のとりうる値の範囲は

ア$\boxed{}$ であり，共有点の数が 2 個でかつ，その共有点の y 座標がともに正であるとき，

a のとりうる値の範囲は イ$\boxed{}$ である。

３．

次の不等式を解け。

(1) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x}\geqq 1$

(2) $\sqrt{4x-x^2}>3-x$

４．

関数 $f(x)=\dfrac{6x-10}{x-1}$ $(x>1)$ について，関数 $y=f(x)$ の逆関数は，$y=$ ア$\boxed{}$ であり，

その定義域は，$x<$ イ$\boxed{}$ である。この 2 つの関数のグラフの 2 つの交点の座標は，

ウ$\boxed{}$ である。

５.

関数 $f(x)=px+q$ について，$f^{-1}(1)=2$，$f^{-1}(5)=4$ であるとき，　定数 p，q の値を求めよ。

６.

関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が $f(x)$ と一致するための必要十分条件を求めよ。

７.

$f(x)=x^2-2x+k$ $(x\geqq 1)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

８.

次の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)=a^{x-1}$の逆関数を$f^{-1}(x)$とする。$f(3)=2$のとき，$a=$ ア $\boxed{}$ で

$f^{-1}(4)=$ イ $\boxed{}$ である。

(2)　$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(d>0)$と$g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$があって，$f(g(x))=x$であるとき，$f(x)$を求めよ。

(3)　関数$f(x)=2x+1$に対して，$g(f(x))=6x+5$となる関数$g(x)$を求めよ。