特殊数列と特殊関数・完全解答

問題 1**

(1)

以後、x 軸の正の方向に 1 だけ進むことを→と表し、y 軸の正の方向に 1 だけ進むことを↑と表す。まず D_1 を進む経路は、→↑のみで $a_1 = \utilde{1}$ となる。また D_2 を進む経路は

$$\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow$$

より $a_2 = \utilde{2}$ となる。次に D_3 を進む経路は

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow$$

より $a_3 = \utilde{5}$ となる。さらに D_4 を進む経路は

$$\begin{aligned}
&\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow \\
&\text{ or } \rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow \\
&\text{ or } \rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow \\
&\text{ or } \rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow \text{ or } \rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow
\end{aligned}$$

より $a_4 = \utilde{14}$ となる。

(補足)

複雑な数え上げは、何らかの規則を課して並べることが重要である。あるいは、原点から各格子点に場合の数を書き込んで和を取っていくと、経路を並べずとも場合の数を計算することができる。

(2)

$n \in \mathbb{N}$ を任意にとり、領域

$$D_{n+1} = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x \leqq n+1,\ 0 \leqq y \leqq n+1,\ y \leqq x,\ (x \in \mathbb{Z} \text{ or } y \in \mathbb{Z})\}$$

上で点 $\mathrm{O}(0,0)$ から点 $\mathrm{A}_{n+1}(n+1, n+1)$ への最短経路の総数 a_{n+1} について考える。

まず点 O から点 A_{n+1} への任意の最短経路は、少なくとも A_{n+1} を通らねばならず、$n+1$ 個の点 $\mathrm{A}_1(1,1),\ \mathrm{A}_2(2,2),\ \ldots\ , \mathrm{A}_{n+1}(n+1, n+1)$ のうち最初に通る点 $\mathrm{A}_m\,(m \in \{1,\,2,\,\ldots,\,n+1\})$ が唯一つ定まる。ここで $a_0 = 1$ と定めるとき、m 個の点 $\mathrm{A}_k(k,k)\,(k \in \{1,\,2,\,\ldots,\,m\})$ のうち A_m 以外を通らないような、点 O から点 A_m への D_{n+1} 上での最短経路の総数 b_m を考える。

これは点 $(1,0)$ から点 $(m,m-1)$ へ D_{n+1} 上を常に $y \leqq x-1$ を満たすように進み、そこから $\mathrm{A}_m(m,m)$ へ到達する最短経路の総数であるから、$b_m = a_{m-1}$ となる。さらに点 A_m から点 A_{n+1} への D_{n+1} 上での最短経路の総数は a_{n-m+1} となるので、

$$a_{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} b_m a_{n-m+1} = \sum_{m=1}^{n+1} a_{m-1} a_{n-m+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

より、$a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ が成立する。 □

(3)
$0 \leqq m \leqq n-1$ なる任意の $m,n \in \mathbb{Z}$ に対して、点 O から点 $\mathrm{B}_{n+1,m+1}(n+1,m+1)$ への D_n 上での最短経路の全体 $S_{n,m}$ を考えると、これは点 O から点 $(n+1,m)$ への D_n 上での最短経路の全体 $T_{n,m}$ と点 O から点 $(n,m+1)$ への D_n 上での最短経路の全体 $U_{n,m}$ の和集合 $T_{n,m} \cup U_{n,m}$ に分解され、$T_{n,m} \cap U_{n,m} = \emptyset$ となるので、$b_{n+1,m+1} = b_{n+1,m} + b_{n,m+1}$ が成立する。 □

(4)
$0 \leqq m \leqq n$ なる任意の $m,n \in \mathbb{Z}$ に対して $b_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1} {}_{n+m}\mathrm{C}_m$ が成立することを、m,n に関する数学的帰納法で示す。

(i)
$n=0$ のとき、$0 \leqq m \leqq n = 0$ より $m=0$ となり、

$$b_{0,0} = a_0 = 1 = \frac{0-0+1}{0+1} {}_{0+0}\mathrm{C}_0$$

から成立する。

(ii)
$m=0$ のとき、$0 = m \leqq n$ なる任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$b_{n,m} = b_{n,0} = 1 = \frac{n-0+1}{n+1} {}_{n+0}\mathrm{C}_0$$

より成立する。

(iii)
$N \geqq 0$ なる $N \in \mathbb{Z}$ に対して $(n,m) = (N+1,N)$ での成立を仮定すると、

$$b_{N+1,N} = \frac{N-N+2}{N+2} {}_{N+N+1}\mathrm{C}_N = \frac{2}{N+2} {}_{2N+1}\mathrm{C}_N$$

として、

$$
\begin{aligned}
b_{N+1,N+1} = b_{N+1,N} &= \frac{2}{N+2}{}_{2N+1}\mathrm{C}_N = \frac{2}{N+2}\cdot\frac{N+1}{2N+2}{}_{2N+2}\mathrm{C}_{N+1} \\
&= \frac{1}{N+2}{}_{2N+2}\mathrm{C}_{N+1} = \frac{N+1-(N+1)+1}{(N+1)+1}{}_{2N+2}\mathrm{C}_{N+1}
\end{aligned}
$$

より、$(n,m)=(N+1,N+1)$ での成立が示された。また $0 \leqq M \leqq N-1$ なる $M \in \mathbb{Z},\ N \in \mathbb{N}$ に対して $(n,m)=(N+1,M),\ (N,M+1)$ での成立を仮定すると、

$$
b_{N+1,M} = \frac{N-M+2}{N+2}{}_{N+M+1}\mathrm{C}_M, \qquad b_{N,M+1} = \frac{N-M}{N+1}{}_{N+M+1}\mathrm{C}_M
$$

として、

$$
\begin{aligned}
b_{N+1,M+1} = b_{N+1,M} + b_{N,M+1} &= \frac{N-M+2}{N+2}{}_{N+M+1}\mathrm{C}_M + \frac{N-M}{N+1}{}_{N+M+1}\mathrm{C}_{M+1} \\
&= \frac{N-M+2}{N+2}\cdot\frac{(N+M+1)!}{M!(N+1)!} + \frac{N-M}{N+1}\cdot\frac{(N+M+1)!}{(M+1)!N!} \\
&= \frac{(N-M+2)\cdot(N+M+1)!}{M!(N+2)!} + \frac{(N-M)\cdot(N+M+1)!}{(M+1)!(N+1)!} \\
&= \frac{(N+M+1)!}{(M+1)!(N+2)!}\{(N-M+2)(M+1)+(N-M)(N+2)\} \\
&= \frac{(N+M+1)!}{(M+1)!(N+2)!}(N^2+3N-M^2-M+2) \\
&= \frac{(N+M+1)!}{(M+1)!(N+2)!}(N-M+2)(N+M+2) \\
&= \frac{N-M+2}{N+2}\cdot\frac{(N+M+2)!}{(M+1)!(N+1)!} = \frac{N-M+1}{N+2}{}_{N+M+2}\mathrm{C}_{M+1} \\
&= \frac{(N+1)-(M+1)+1}{(N+1)+1}{}_{(N+1)+(M+1)}\mathrm{C}_{M+1}
\end{aligned}
$$

より、$(n,m)=(N+1,M+1)$ での成立が示された。

(i),(ii),(iii) より、数学的帰納法から、
$0 \leqq m \leqq n$ なる任意の $m,n \in \mathbb{Z}$ に対して $b_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}{}_{n+m}\mathrm{C}_m$ が成立する。 □

(補足)
この結果から、特に $a_n = b_{n,n} = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ も得られる。またこの数学的帰納法は、拙著『解析計算準備』問題 123, 問題 124 にて連立仮定型の数学的帰納法として解説されている。

本問の $b_{n,m}\,(0 \leqq m \leqq n,\, m,n \in \mathbb{Z})$ は、n 個の区別のない矢印→と m 個の区別のない矢印↑の計 $m+n$ 個を一列に並べる場合で、かつ左から順に見るとき常に→の個数が↑の個数を下回らないようなものの個数を表すと解釈できる。この $b_{n,m}$ を一般 **Catalan** 数といい、特に $C_n = b_{n,n} = a_n$ から定まる $C_n\,(n \geqq 0,\, n \in \mathbb{Z})$ を、**Catalan** 数という。

この C_n は次のようにして直接計算することができ、多くの文献で紹介されている。

まず $n \in \mathbb{N}$ を任意にとる。領域

$$E_n = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x \leqq n,\, 0 \leqq y \leqq n,\, (x \in \mathbb{Z} \text{ or } y \in \mathbb{Z})\}$$

上で点 $\mathrm{O}(0,0)$ から点 $\mathrm{A}_n(n,n)$ へ至る最短経路の総数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ であり、ここから領域 E_n 上で $y > x$ なる部分を通過する最短経路の総数 d_n を除くことで $C_n = a_n$ を得る。そこで d_n について考えると、E_n 上で初めて直線 $y = x$ と横切る点 B をとり、その B から点 A_n への経路を直線 $y = x+1$ に関して対称移動することにより、点 B から点 $\mathrm{D}_n(n-1, n+1)$ までの経路が一つ得られる。つまりは、B までの経路と接続して、領域

$$F_n = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x \leqq n+1,\, 0 \leqq y \leqq n-1,\, (x \in \mathbb{Z} \text{ or } y \in \mathbb{Z})\}$$

上で点 $\mathrm{O}(0,0)$ から点 $\mathrm{D}_n(n-1, n+1)$ へ至る最短経路が得られる。逆にこのような最短経路を任意にとるとき、同じ対称移動により点 $\mathrm{O}(0,0)$ から点 $\mathrm{A}_n(n,n)$ への E_n 上での最短経路が唯一つ得られる。ゆえに $d_n = {}_{(n-1)+(n+1)}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ が成立するので、

$$\begin{aligned} C_n &= {}_{2n}\mathrm{C}_n - d_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{n}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} \end{aligned}$$

より、Catalan 数 $C_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ を得る。

ところで、$m \leqq n$ なる $m, n \in \mathbb{N}$ に対する一般 Catalan 数 $b_{n,m}$ は、次の場合の数を表すことも知られており、大学入試においても時折出題される。

上段と下段の 2 段に、正方形の空欄が隙間なく左から右に並んでいる。
上段は空欄が n 個あり、下段は空欄が m 個あり、上段と下段の一番左は上下が揃っていて、$m \leqq n$ を満たすものとする。ここで 1 から $n+m$ までの $n+m$ 個の自然数を、この $n+m$ 個の空欄に次の規則 (A),(B) を満たすように 1 つずつ記入していく。
(A) 上段は左から右に進むほど数は大きくなる。下段も左から右に進むほど数が大きくなる。
(B) m 個の列を縦に見るとき、どの列においても上段より下段の方が数が小さい。

このように $n+m$ 個の数を記入する場合の数は、一般 Catalan 数 $b_{n,m}$ となる。

さて、この事実が成立する理由を説明しておく。まず n 個の区別のない文字 A と、m 個の区別のない文字 B の計 $n+m$ 文字を一列に並べる場合で、かつ左から順に見るとき常に B の個数が A の個数を下回らないようなものの個数が $b_{n,m}$ であると解釈できる。なぜならこのような A,B の配列と、空欄に数字を当てはめた結果が次のように一対一に対応するからである。

まずこの A,B 並び方を任意に一つとるとき、左から順にみて、1 文字目は B となるので、下段の左端に 1 を記入することにし、次に 2 文字目が A であれば上段左から 1 文字目に 2 を記入し、2 文字目が B であれば下段左から 2 文字目に 2 を記入する。以下同様に、A が出れば上段の空欄左端にこれまで使っていない最小の数字を記入して、B が出れば下段の空欄左端にこれまで使っていない最小の数字を記入する。これにより、条件 (A),(B) を満たす配置が一つ得られ、また A,B の異なる配置に対しては異なる数字の配置が対応する。

例えば 8 文字 AAABBBBB の並び方のニつ BABBAAAA, BABABAAA をとると、前者からは (上段, 下段) として $(25678, 134)$ が得られ、後者からは $(24678, 135)$ が得られる。

逆に、条件 (A),(B) を満たす任意の配置に対して、その配置を作る A,B の配列が唯一つ存在する。

例えば BBABAAAA に対しては $(35678, 124)$ のみが与えられる。

以上から、当初の空欄への記入の仕方が $b_{n,m}$ で与えられることが示されるのである。

問題 **2****

(1)

$$\begin{aligned}&((((AB)C)D)E) \text{ or } ((A(B(CD)))E) \text{ or } (((AB)(CD))E) \text{ or } (((A(BC))D)E)\\ &\text{ or } ((A((BC)D))E) \text{ or } (((AB)C)(DE)) \text{ or } ((A(BC))(DE)) \text{ or } ((AB)((CD)E))\\ &\text{ or } ((AB)((C(DE))) \text{ or } (A(((BC)D)E)) \text{ or } (A(B(C(DE)))) \text{ or } (A((BC)(DE)))\\ &\text{ or } (A((B(CD))E)) \text{ or } (A(B((CD)E)))\end{aligned}$$

より、$b_5 = \underset{\sim}{14}$ となる。