東京大学大学院数理科学研究科
修士課程　2018 年度入学試験　専門 A

A 第 1 問 (必答)

$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする．また，$a > 0$ に対して

$$I_a(f) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx$$

と定義する．

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$ が存在したとする．このとき，$\lim_{a\to\infty} I_a(f) = A$ が成立するかどうかを判定し，成立するならば証明を与え，成立しないならば反例を与えよ．

(2) $\lim_{a\to\infty} I_a(f) = A \in \mathbb{R}$ が存在したとする．このとき，狭義単調増大列 $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots$ で，$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ となるものが存在することを示せ．

(解答例)

(1)

以下 $I := [0, \infty)$ として，$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(I)$ に対して $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$ とすると

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x > \delta\,;\, |f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

であり，任意の $\epsilon > 0$ に対して上の $\delta > 0$ をとると，$a > \delta$ なる任意の a に対して

$$\begin{aligned}
|I_a(f) - A| &= \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx - A\right| = \left|\frac{1}{a}\int_0^a \{f(x) - A\}\,dx\right| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(x) - A|\,dx \quad (\because a > 0) \\
&= \frac{1}{a}\left\{\int_0^\delta |f(x) - A|\,dx + \int_\delta^a |f(x) - A|\,dx\right\} < \frac{1}{a}\left\{\int_0^\delta |f(x) - A|\,dx + \int_\delta^a \frac{\epsilon}{2}\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\delta |f(x) - A|\,dx + \frac{a - \delta}{2a}\epsilon < \frac{1}{a}\int_0^\delta |f(x) - A|\,dx + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

となる．ここで $a>0$ を，$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^\delta |f(x)-A|\,dx<\dfrac{\epsilon}{2}$ となるように，

$$a_0:=\max\left\{\delta,\,\frac{2}{\epsilon}\int_0^\delta |f(x)-A|\,dx\right\}$$

として $a>a_0$ と取り直すと，$|I_a(f)-A|<\dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon,$ つまりは

$$\forall\epsilon>0,\,\exists a_0>0,\,\forall a>a_0\,;\,|I_a(f)-A|<\epsilon$$

を満たすことから，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}I_a(f)=A$ が成立する． □

(2)

$f:I\longrightarrow\mathbb{R},\,f\in C(I)$ に対して $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I_a(f)=A\in\mathbb{R}$ とする．

(i)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=A$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ を満たす I 上の任意の狭義単調増加列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$ が成立する．

(ii)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=B\in\mathbb{R}\backslash\{A\}$ のとき，(1) の結果から $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I_a(f)=B\neq A$ を導き矛盾するので不適である．

(iii)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ のとき，

$$\forall R>0,\,\exists\delta>0,\,\forall x>\delta\,;\,f(x)>2R$$

となり，任意の $R>0$ に対して上の $\delta>0$ をとると，$a>\delta$ なる任意の a に対して

$$\begin{aligned}I_a(f)&=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx=\frac{1}{a}\left\{\int_0^\delta f(x)\,dx+\int_\delta^a f(x)\,dx\right\}\\&>\frac{1}{a}\left\{\int_0^\delta f(x)\,dx+\int_\delta^a 2R\,dx\right\}=\frac{1}{a}\left\{\int_0^\delta f(x)\,dx-2\delta R\right\}+2R\end{aligned}$$

となる．ここで $a>0$ を $\dfrac{1}{a}\left\{\displaystyle\int_0^\delta f(x)\,dx-2\delta R\right\}>-R$ を満たすように，

$$a_1:=\max\left\{\delta,\,\frac{1}{R}\left\{2\delta R-\int_0^\delta f(x)\,dx\right\}\right\}$$

とおき $a>a_1$ と取り直すと，$I_a(f)>R,$ つまりは

$$\forall R>0,\,\exists a_1>0,\,\forall a>a_1\,;\,I_a(f)>R$$

となることから $\lim_{a\to\infty} I_a(f)=\infty$ を導き矛盾するので不適である．また $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ のときも，同様にして $\lim_{a\to\infty} I_a(f)=-\infty$ を導き矛盾するので不適である．

(iv)

$$\exists B<A, \exists\delta>0, \forall x>\delta\,;\, f(x)\leq B$$

のとき，同様にして $\lim_{a\to\infty} I_a(f)\leq B<A$ を導き矛盾するので不適である．また

$$\exists B>A, \exists\delta>0, \forall x>\delta\,;\, f(x)\geq B$$

のとき，同様にして $\lim_{a\to\infty} I_a(f)\geq B>A$ を導き矛盾するので不適である．

(ii),(iii),(iv) から，(i) の場合でないときは，

$$\exists x_1\geq 0\,;\, |f(x_1)-A|<1$$

を満たし，またこの $x_1\in I$ に対して

$$\exists x_2\geq x_1+1\,;\, |f(x_2)-A|<\frac{1}{2}$$

を満たす．これを繰り返すことにより，I 上の数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で

$$\forall n\in\mathbb{N}\,;\, \left(x_{n+1}\geq x_n+1 \ \wedge |f(x_n)-A|<\frac{1}{n}\right)$$

を満たすものがとれる．これは $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$ の成立を示している．ゆえに (i) の場合と合わせ，I 上の狭義単調増加列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で，$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$ を満たすものが存在する． □

A 第 2 問 (必答)

複素数 a を固定する．x を変数とする 2 次以下の複素係数多項式全体のなす複素線型空間を V で表す．V の線型変換 S, T を，

$$S(f(x)) = x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right), \qquad T(f(x)) = f(x+a), \qquad (f(x) \in V)$$

で定める．また，$U = S \circ T$ とする．

(1) V の線型変換 U の特性多項式を求めよ．

(2) V の線型変換 U が対角化不可能であるような a を全て求めよ．

(解答例)

(1)

$\mathbb{C}$ 上の線型空間 $V = x^2\mathbb{C} + x\mathbb{C} + \mathbb{C}$ と $f(x) \in V$ に対して，

$$U(f(x)) = (S \circ T)(f(x)) = S(T(f(x))) = S(f(x+a)) = x^2 f\left(-\frac{1}{x} + a\right)$$

となるので，$f(x) = px^2 + qx + r \in V$ $(p, q, r \in \mathbb{C})$ とおくと，U の線型性から

$$\begin{aligned}
&pU(x^2) + qU(x) + rU(1) \\
&= U(px^2 + qx + r) = U(f(x)) = x^2 f\left(-\frac{1}{x} + a\right) \\
&= x^2\left\{p\left(-\frac{1}{x} + a\right)^2 + q\left(-\frac{1}{x} + a\right) + r\right\} = p(a^2x^2 - 2ax + 1) + q(ax^2 - x) + rx^2
\end{aligned}$$

より $U(x^2) = a^2x^2 - 2ax + 1,\ U(x) = ax^2 - x,\ U(1) = x^2$ を得る．このとき，

$$(U(x^2),\, U(x),\, U(1)) = (a^2x^2 - 2ax + 1,\, ax^2 - x,\, x^2) = (x^2, x, 1)\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ -2a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，V の基底 $x^2, x, 1$ に関する U の表現行列を

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ -2a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．ここで線型変換 U の特性多項式は $\det(tE_3 - A)$ であって，

$$\det(tE_3 - A) = \det\begin{pmatrix} t-a^2 & -a & -1 \\ 2a & t+1 & 0 \\ -1 & 0 & t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -a & t(t-a^2)-1 \\ 0 & t+1 & 2at \\ -1 & 0 & t \end{pmatrix}$$
$$= a \cdot 2at + \{t(t-a^2)-1\} \cdot (t+1) = (t+1)(t^2 - a^2 t - 1) + 2a^2 t$$
$$= t^3 - (a^2-1)t^2 + (a^2-1)t - 1 = \underline{(t-1)\{t^2 - (a^2-2)t + 1\}}$$

となる．

(2)

U の固有値 λ に対する $\mathbb{C}^3$ の固有空間 $\ker(\lambda E_3 - A)$ の次元 $d_\lambda := \dim\ker(\lambda E_3 - A)$ 及び，λ の固有値としての重複度 m_λ を考えるとき，$U : V \longrightarrow V$ が対角化不可能であるためには，U のある固有値 λ_0 が存在して $d_{\lambda_0} < m_{\lambda_0}$ となることが必要十分である．また一般に $d_\lambda \geq 1$ であることから，$\exists \lambda \in \mathbb{C};\, m_\lambda \geq 2$, つまりは U の固有多項式の根に重複があることが必要である．

(i)

$\det(tE_3 - A)$ が 3 重根 1 を持つとき，$a^2 - 2 = 2 \ \Leftrightarrow\ a = \pm 2$ より $a = \pm 2$ となる．

(i-1)

$a = 2$ のとき，任意の $v := {}^t(x, y, z) \in \ker(E_3 - A)$ に対して

$$0 = (E_3 - A)v = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x - 2y - z \\ 4x + 2y \\ -x + z \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\ (y = -2x \wedge z = x)\ \Leftrightarrow\ v = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より，$\ker(E_3 - A) = \mathrm{span}\{{}^t(1, -2, 1)\}$ から

$$d_1 = \dim\ker(E_3 - A) = 1 < 3 = m_1$$

となるので，U は対角化不可能となる．

(i-2)

$a = -2$ のとき，任意の $v := {}^t(x, y, z) \in \ker(E_3 - A)$ に対して

$$0 = (E_3 - A)v = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2y - z \\ -4x + 2y \\ -x + z \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\ (y = 2x \wedge z = x)\ \Leftrightarrow\ v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$